$\Rightarrow n \leq m$

THM. 4.48 Pour $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ application linéaire.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) T est surjective

(ii) $\operatorname{Img}(T) = \mathbb{R}^m$

(iii) $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^m$, le SEL $[T] \cdot \bar{x} = \bar{b}$ est compatible

(iv) les colonnes de $[T]$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^m$

(v) la FER de $[T]$ n'a pas de lignes nulles

(vi) la FER de $[T]$ possède un pivot par ligne.

$\Rightarrow n \geq m$

Exemple 4.47 Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

l'app. donnée par (on admet T linéaire)

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

1 $[T]$?

2 T inj ? T surj ? T bij ?

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEL}} \cdots \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{FER de } [T]}$$

T n'est pas surj $\Longleftarrow$ { $\longrightarrow$ pas de pivot sur la 3ème ligne

T n'est pas inj $\Longleftarrow$ { $\longrightarrow$ pas de pivot sur la 3ème colonne

Bonus

Ker(T) ?

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

équiv

$\boxed{\text{Résoudre le SEL } [T]\cdot\bar{x} = 0}$

dans ce cas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

□

Dans cette séance on va voir :

(i) produit de matrices → lien avec la composition d'AL
(ii) notion de transposée, matrice symétrique et antisymétrique
(iii) notion de matrice identité
(iv) notion de commutation de matrices
(v) notion de matrice inversible

Chapitre 5 Opérations matricielles

Déf. 5.1 F.d. $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$, on définit

$\underbrace{A.B}_{\text{produit de } A \text{ et } B}$ = matrice à m lignes et p colonnes donnée par

$$(A.B)_{i,k} := \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot B_{j,k}$$

$$= A_{i,1}B_{1,k} + A_{i,2}B_{2,k} + \dots + A_{i,n}B_{n,k}$$

pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ et $k \in [\![1, p]\!]$.

Exemple 5.2*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

$2 \times 3 \rightarrow A$

$B \leftarrow 3 \times 4$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} * & (A.B)_{1,2} & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}}_{2 \times 4}$$

$$(A.B)_{1,2} = A_{1,1} B_{1,2} + A_{1,2} B_{2,2} + A_{1,3} B_{3,2}$$

1ère ligne de A

2ème colonne de B

$$= 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + (-2) \cdot (-1) = 11$$

$$= \begin{pmatrix} ? & 11 & ? & ? \\ (AB)_{2,1} & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

Calculer !

$= 14$

Motivation

Soient $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

app. lin.

Alors $S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une app. lin.

$$(S \circ T)(\bar{x}) \overset{\text{déf}}{:=} S(T(\bar{x}))$$

(Lemme 4.41)

En plus

$$[S \circ T] = \underbrace{[S] \cdot [T]}_{\text{produit des } \cancel{\text{ma}}\text{trices !?!}}$$

(Point clé, p. 84)

Déf. 5.5 Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, on définit

$$A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{R}) \text{ par } (A^T)_{i,j} := A_{j,i}$$

On l'appelle <u>matrice transposée</u> de A.

On dit que $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est <u>symétrique</u>

Alors $S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une app. lin.

$$(S \circ T)(\bar{x}) \overset{\text{déf}}{:=} S(T(\bar{x}))$$

(Lemme 4.41)

En plus

$$\underbrace{[S \circ T] = [S] \cdot [T]}_{\text{produit des matrices !?!}}$$

(Point clé, p. 84)

Déf. 5.5 Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, on définit

$$A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{R}) \text{ par } (A^T)_{i,j} := A_{j,i}$$

On l'appelle matrice transposée de A.

On dit que $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est symétrique

Si $A = A^T$, on dit que $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est **antisymétrique** $A = -A^T$.

(pour $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ avec $m=n$, on dit que A est **carrée**)

Exemple 5.6*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Déf. 5.11 On dit que $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ **commutent** si $A \cdot B = B \cdot A$

⚠ En général $A.B \neq B.A$!

Exemple 5.10 | $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A.B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Déf. 5.12 | La matrice identité de taille n est la matrice carrée :

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Big] \ n \text{ lignes}$$

n colonnes

Déf. 5.13 On dit que $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe une $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $A.B = B.A = I_n$

Si c'est le cas : B est unique et on l'appelle inverse de A et on la note A^{-1}.

Prop. 5.8 • $(A^T)^T = A$

- $\underbrace{(A+\lambda B)^T = A^T + \lambda B^T}_{\text{i.e. l'application } A \mapsto A^T \text{ est linéaire !!}}$ pour $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Prop. 5.9 $\boxed{+5.19}$

i) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

ii) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

iii) $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

iv) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

on suppose que chaque produit est défini

v) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ si A, B inversibles

vi) $(A^{-1})^{-1} = A$ si A inversible

vii) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ si A inversible

(Preuve) pour (v)